De Solipsismo, red. J. Dadaczyński, A. Olszewski, Z. Wolak,
Kraków 2020, s. 139–159.
DOI: https://doi.org/10.15633/9788374389303.07

PIOTR ŁUKOWSKI
Uniwersytet Jagielloński, Kraków

Logiczny solipsyzm

Abstrakt

Perspektywa prawdziwościowa jest powszechnie przyjętym kanonem rozumienia i rozwijania logiki. Polega ona na redukcji sensu zdania do wartości logicznej. I chociaż tak pojmowana logika nie ma wiele wspólnego z naszym myśleniem – my bowiem myślimy treściami zdań, a nie wartościami logicznymi – jest dla logików czymś zwyczajnym i zrozumiałym, a nawet oczywistym. Pogląd ten jest tak silnie ugruntowany i powszechny, że rodzi równie silne i równie powszechne przekonanie, że poza logikami prawdziwościowymi nie ma logik formalnych. Pogląd ten to swoisty solipsyzm, chciałoby się rzec, solipsyzm logiczny.

Słowa kluczowe

Logika fregowska, logika niefregowska, logika prawdziwościowa, logika treści, logiki deontyczne, identyczność zdaniowa Suszki, implikacja treściowa, teza Buridana, zdanie kłamcy, definicja prawdy Tarskiego, paradoks Rossa, paradoksy implikacji materialnej, Suszko

Abstract

A truth-functional perspective is a commonly accepted paradigm of understanding and developing of logic. Such an approach reduces a sense of the sentence to the logical value. It means that logic does not deal with our thinking – we think by sentence's contents and not by truth values. Despite this, it is considered that there is no logic outside truth-functional logic. It is a kind of solipsism. As each solipsism it leads to various problems and paradoxes that are easy to avoid. It is enough to note that beyond truth-functional logics, there are some other logics – logics of content.

Keywords

Fregean logic, non-Fregean logic, truth-functional logic, logic of content, deontic logics, Suszko's sentential identity, content implication, Buridan principle, Liar sentence, Tarski's definition of truth, Ross's paradox, paradoxes of material implication, Suszko

1. Fregowska prawdziwościowość *versus* niefregowska treściowość

Niestety, logiki niefregowskie, dzieło życia Romana Suszki, wciąż jest niedostatecznie docenianym odkryciem. Skonstruowane przez niego systemy formalne znalazły swoje miejsce obok wielu innych, wydawać by się mogło, że podobnych. Tymczasem Suszko przełamał nimi monopol na sposób rozumienia logiki. Mówiąc ściślej, chciał przełamać, ale obojętność wobec jego dzieła sprawiła, że nie dostrzeżono, iż logiki niefregowskie przeciwstawiają się powszechnie obowiązującemu paradygmatowi uprawiania logiki. Można powiedzieć, że pozostawanie w dotychczasowym sposobie rozumienia logiki formalnej było i chyba nadal jest pewną postacią *solipsyzmu logicznego*, czyli przekonania, że poza naszym prawdziwościowym pojmowaniem logiki nie ma logiki.

Zgodnie z założeniem Suszki logika jest *niefregowska*, gdy nie spełnia tzw. aksjomatu Fregego, czyli następującego warunku:

Istnieją tylko dwa korelaty semantyczne (odniesienia) dla zdań: prawda i fałsz.
Wszystkie zdania prawdziwe mają jeden wspólny korelat semantyczny, prawdę.
Wszystkie zdania fałszywe mają jeden wspólny korelat semantyczny, fałsz.

Zatem logika jest niefregowska, jeśli semantyką dla niej adekwatną nie może być klasa modeli, których uniwersa są dwuelementowe. Intencją Suszki było, aby tworzące ogromną mnogość korelaty semantyczne uważać za sytuacje. Tym samym logika niefregowska była dla Suszki logiką sytuacyjną, a nie prawdziwościową. Prawdziwościowa logika to taka, która spełnia aksjomat Fregego, czyli jest to logika fregowska. W dalszym ciągu, rozwijając pomysł Suszki, będziemy jednak inaczej niż on rozumieli korelaty semantyczne. Dla nas są one treściami zdań, czyli myślami wyrażonymi przez zdania. Treści te będą więc w dalszym ciągu sensami, lub inaczej – znaczeniami zdań.

Prawdopodobnie najlepiej znanym rachunkiem logicznym Suszki jest *rachunek zdaniowy z identycznością* (*SCI*, od *Sentential Calculus with Identity*) (Bloom, Suszko 1972; Suszko 1975). Jest on zdefiniowany na *SCI*-języku, czyli języku *Klasycznego Rachunku Zdaniowego* (*KRZ*) poszerzonego o nowy spójnik identyczności „≡”, jako aksjomatyczne wzmocnienie *KRZ* formułami:

$A_{1\equiv}$ $\quad \alpha \equiv \alpha$
$A_{2\equiv}$ $\quad (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\neg\alpha \equiv \neg\beta)$
$A_{3\equiv}$ $\quad ((\alpha \equiv \beta) \wedge (\gamma \equiv \delta)) \rightarrow ((\alpha \mathbin{\S} \gamma) \equiv (\beta \mathbin{\S} \delta))$, dla $\S \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \equiv\}$
$A_{4\equiv}$ $\quad (\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Aksjomaty dla nowego spójnika są takie, aby nie dawał się on zinterpretować przy pomocy wartości logicznych. To właśnie spójnik identyczności zdaniowej Suszki jest niefregowskim spójnikiem, który gwarantuje niefregowskość całego rachunku. Wystarczy bowiem chociaż jeden spójnik niefregowski, aby rachunek stał się niefregowskim.

Modus Ponens (*MP*) $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta$ jest jedyną pierwotną regułą inferencji *SCI*. Semantykę adekwatną dla *SCI* stanowią tzw. *SCI*-modele, czyli matryce $\mathcal{M}_{SCI} = (\mathcal{A}_{SCI}, D)$ takie, że $\mathcal{A}_{SCI} = (A_{SCI}, -, \cap, \cup, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \approx)$ jest algebrą podobną do $\mathcal{L}_{SCI} = (For_{SCI}, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \equiv)$, D jest niepustym podzbiorem zbioru A_{SCI} oraz dla dowolnych a, $b \in A_{SCI}$,

1. $-a \in D$ wtw $a \notin D$
2. $a \cap b \in D$ wtw $a \in D$ i $b \in D$
3. $a \cup b \in D$ wtw $a \in D$ lub $b \in D$
4. $a \Rightarrow b \in D$ wtw $a \notin D$ lub $b \in D$
5. $a \approx b \in D$ wtw $a = b$

Inferencja semantyczna jest zdefiniowana standardowo:

$X \models_{SCI} \alpha$ wtw dla dowolnych *SCI*-modelu $\mathcal{M}_{SCI} = (A_{SCI}, D)$ i $v \in Hom(\mathcal{L}_{SCI}, \mathcal{A}_{SCI})$ $v(\alpha) \in D$, jeśli tylko dla dowolnego $\beta \in X$, $v(\beta) \in D$.

Prosta obserwacja warunków *SCI*-modelu pokazuje, że rzeczywiście spójnik identyczności jest jedynym spójnikiem niefregowskim – tylko on jest zdefiniowany bez odniesienia do wartości logicznej, którą w przypadku prawdy symbolizuje należenie do zbioru D, w przypadku fałszu zaś nienależenie do D.

Jedynymi tautologiami *SCI*, których głównym funktorem jest spójnik identyczności, są identyczności trywialne $\alpha \equiv \alpha$. W *SCI* nie ma więc założonych innych niż oczywiste identyczności: ta sama myśl nie jest wyrażona przez dwa różne zdania. Oczywiście można przyjąć, że z jakiegoś powodu dwa różne zdania uznamy za identyczne, ale wśród tez *SCI* nie ma innych niż trywialne identyczności.

Przez dziesięciolecia nie były znane inne logiki niefregowskie jak tylko te, których niefregowskość jest wymuszona spójnikiem jakiejś niefregowskiej równoważności, czyli identyczności zdaniowej oraz jej wzmocnień. Fakt ten oznaczał, że nie można było zdefiniować implikowania treściowego jednego zdania przez inne. Tymczasem takie właśnie zależności treściowe leżą u podstaw nie tylko naszego codziennego myślenia, ale również myślenia naukowego, czy wręcz dowodów w matematyce i logice formalnej.

Rachunkiem, którego niefregowski charakter jest spowodowany spójnikiem implikacji, jest *klasyczna logika treści* (*CCL*, od *Contentual Classical Logic*) (Łukowski 1997, 2006, 2011). Określona na *CCL*-języku $\mathcal{L}_{CCL} = (For_{CCL}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, :)$, będącym klasycznym językiem zdaniowym poszerzonym o nowy spójnik implikacji treściowej „:", *CCL* jest aksjomatycznym wzmocnieniem *KRZ* o następujące formuły:

$A_{1:}$ $((\alpha : \beta) \wedge (\beta : \delta)) \rightarrow (\alpha : \delta)$

$A_{2:}$ $(\alpha \wedge \beta) : \alpha$

$A_{3:}$ $(\alpha \wedge \beta) : (\beta \wedge \alpha)$

$A_{4:}$ $\alpha : (\alpha \wedge \alpha)$

$A_{5:}$ $((\alpha : \beta) \wedge (\beta : \alpha)) \rightarrow ((\neg\alpha : \neg\beta) \wedge (\neg\beta : \neg\alpha))$

$A_{6:}$ $((\alpha : \beta) \wedge (\beta : \alpha) \wedge (\delta : \gamma) \wedge (\gamma : \delta)) \rightarrow (((\alpha \S \delta) : (\beta \S \gamma)) \wedge ((\beta \S \gamma) : (\alpha \S \delta)))$,

dla $\S \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, :\}$

$A_{7:}$ $((\alpha : \beta) \wedge (\delta : \gamma)) \rightarrow ((\alpha \S \delta) : (\beta \S \gamma))$, for $\S \in \{\wedge, \vee\}$

$A_{8:}$ $(\alpha : \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Modus Ponens (*MP*) $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta$ jest jedyną pierwotną regułą inferencji *CCL*. Semantykę adekwatną dla *CCL* tworzy klasa tzw. *CCL*-modeli, czyli matryc $\mathcal{M}_{CCL} = (\mathcal{A}_{CCL}, D)$ takich, że $\mathcal{A}_{CCL} = (A_{CCL}, -, \cap, \cup, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \supset)$ jest algebrą podobną do języka $\mathcal{L}_{CCL}$, D jest niepustym podzbiorem zbioru A_{CCL} i dla dowolnych $a, b \in A_{CCL}$,

1. $a = a \cap a$
2. $a \cap b = b \cap a$
3. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$
4. $-a \in D$ wtw $a \notin D$
5. $a \cap b \in D$ wtw $a \in D$ i $b \in D$
6. $a \cup b \in D$ wtw $a \in D$ lub $b \in D$
7. $a \Rightarrow b \in D$ wtw $a \notin D$ lub $b \in D$
8. $a \supset b \in D$ wtw $a = b \cap c$, dla pewnego $c \in A_{CCL}$

Inferencja semantyczna jest zdefiniowana standardowo:

$X \models_{CCL} \alpha$ wtw dla dowolnych *CCL*-modelu $\mathcal{M}_{CCL} = (\mathcal{A}_{CCL}, D)$ i $v \in Hom(\mathcal{L}_{CCL}, \mathcal{A}_{CCL})$ $v(\alpha) \in D$, jeśli tylko dla dowolnego $\beta \in X$, $v(\beta) \in D$.

Oba niefregowskie spójniki, identyczności Suszki i implikacji treściowej, łączy prosty związek. Wzmocnienie identyczności Suszki formułami

$$(\alpha \wedge \alpha) \equiv \alpha$$
$$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$$
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

daje identyczność treściową (*content identity*) „$\equiv_c$" taką, że

$$((\alpha : \beta) \wedge (b : \beta)) \leftrightarrow (\alpha \equiv_c \beta).$$

Zamierzonym sposobem czytania zdania $p : q$ jest „zdanie *p* mówi to, co mówi zdanie *q*", krócej „*p* mówi *q*". Ponieważ korelaty zdań są rozumiane jako treści wyrażone tymi zdaniami, zdanie $p : q$ jest prawdziwe, gdy treść zdania *q* jest częścią

$$v(p) = v(q) \cap c$$

lub całością

$$v(p) = v(q)$$

treści zdania *p*. W drugim przypadku nie tylko zdanie $p : q$ jest prawdziwe, ale także prawdziwe jest zdanie $q : p$. Nietrudno więc zauważyć, że prawdziwość zdania $p : q$ oznacza, że treść $v(q)$ zdania *q* jest ingrediensem, w sensie Leśniewskiego, treści $v(p)$ zdania *p*[1]. Zazwyczaj jednak treść jednego zdania jest częścią niebędącą całością treści innego zdania. Co więcej, rozpoznając treść danego zdania, nie zawsze, a może nawet rzadko kiedy, potrafimy wymienić wszystkie składowe jego treści. Dlatego tak ważnym elementem

[1] Simons 2020: „Definition I. The expression 'ingredient of object *A*' is used to denote *A*, and every part of *A*. That is: Object *B* is an ingredient of object *A* if and only if either *B* is *A* or *B* is part of *A*. Nowadays the term 'ingredient' is often simply rendered as 'part' and Leśniewski's 'part' is called 'proper part'".

warunku ósmego *CCL*-modelu jest pewna bliżej nieokreślona treść $c \in A_{CCL}$. Dla przykładu rozważmy zdanie „Dzisiaj jest Wielkanoc". Między innymi zdanie to mówi: „Dzisiaj jest niedziela", „Obecnie nie ma zimy", „Obecnie nie ma lata". Co byśmy jednak nie powiedzieli, najprawdopodobniej zawsze będzie coś do dopowiedzenia. Stąd jeśli jakieś zdanie p mówi q_1 i … i q_n, czyli prawdziwe są zdania $p : q_i$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, to i tak wypada założyć istnienie jakiegoś zdania x o nieuświadamianej w tej chwili przez nas treści, takiego że p mówi x. Wtedy nie tylko prawdziwe jest zdanie $p : (q_1 \wedge \dots \wedge q_n \wedge x)$, ale również zdanie $p \equiv_c (q_1 \wedge \dots \wedge q_n \wedge x)$. Warunek ósmy dotyczy tego właśnie uzupełnienia rozpoznawanej treści o jej nieznany nam w danej chwili składnik. Co więcej, ta naturalna własność charakteryzująca rozumienie treści każdego zdania wskazuje na jeszcze jeden jej ważny aspekt: częściowość rozpoznanego sensu zdania. Jeśli bowiem pomyślimy, o czym mówi dane zdanie p, to uświadomimy sobie treści szeregu zdań $q_1, \dots, q_n$, ale to rozpoznanie treści $v(p)$ i tak nie będzie kompletne, gdyż zawsze będzie istniała jakaś dodatkowa a nieuświadamiana w danej chwili treść $c = v(x)$, czyli dokładnie tak, jak w naszym codziennym myśleniu.

Dodatkowe światło na charakter spójnika implikacji treściowej rzuca fakt, iż jedynymi tautologiami *CCL*, których głównym funktorem jest ten właśnie spójnik, są formuły jednego z dwóch następujących rodzajów:

$$\alpha : \alpha \quad \text{oraz} \quad (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) : \alpha_i, \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pierwsza tautologia informuje nas, że każde zdanie mówi to, co mówi – chciałoby się dodać, że ani mniej, ani więcej. Ta, wydawać by się mogło, trywialna tautologia ma doniosłe znaczenie, gdyż jest formalnym wyrażeniem tzw. tezy Buridana (*virtual entailment principle*), czyli zasady mówiącej, że „każde zdanie rości do prawdy". Sens tej zasady, choć prosty, jest na ogół zupełnie nieuświadamiany. Otóż każde zdanie, bez względu na swoją wartość logiczną, rości do prawdy w tym sensie, że bez względu na to, czy jest przez nas uznane za prawdziwe czy za fałszywe, to aby je zrozumieć, musimy jego treść potraktować tak, jakby była prawdziwa. Innymi słowy, myślimy logiką prawdy, a nie fałszu. Aby ocenić wartość logiczną zdania, najpierw musimy je zrozumieć. Jednak aby je zrozumieć, musimy je, niejako roboczo i tymczasowo, potraktować jako zdanie prawdziwe. W przeciwnym razie odczytamy sens przeciwny. Dla przykładu, aby rozpoznać wartość logiczną zdania „Łódź leży na południe od Krakowa", należy potraktować je, jakby było prawdziwe. Tylko pod tym warunkiem na wyobrażonej przez nas mapie Polski Łódź będzie leżała poniżej Krakowa, czyli na południe od Krakowa. Analizowane tu zdanie mówi więc dokładnie to i nic poza tym. Gdy je już rozumiemy, możemy skonfrontować jego treść z rzeczywistością i stwierdzić, że jednak na mapie Polski Łódź leży nad Krakowem, czyli nie jest tak, jak to zdanie mówi, a więc jest ono fałszywe. Czy jest możliwe, abyśmy wyjściowe zdanie zrozumieli inaczej, czyli tak, jakby rościło do fałszu? Oczywiście, że tak. Jednak wówczas treść tego zdania byłaby alternatywą szeregu możliwości z wyjątkiem tej jednej jedynej, czyli że na mapie Polski Łódź leży poniżej Krakowa. Naturalnie w logice fałszu dochodzi do rozproszenia informacji, bo miejsce jednej możliwości zajmuje ich całe mnóstwo. W tym tkwi przewaga logiki prawdy, że nie rozprasza informacji, lecz ją skupia. Łatwo to zauważyć na prostym przykładzie zdania „$a = 5$". Jeśli dziedziną naszych rozważań będzie zbiór liczb naturalnych mniejszych od 6, to liczba konfiguracji, w jakich może znaleźć się liczba ogólna a, wynosi 5: $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$, $a = 5$. Gdy myślimy logiką prawdy, to każde zdanie, a więc i „$a = 5$", rości do prawdy. Należy je więc rozumieć jako wyrażające sytuację ostatnią, czyli $a = 5$. Jeśli jednak myślelibyśmy logiką fałszu, to każde zdanie, a więc i to tutaj rozważane, rościłoby do fałszu, czyli należałoby je rozumieć jako wyrażające jeden z czterech pozostałych przypadków: albo $a = 1$, albo $a = 2$, albo $a = 3$, albo $a = 4$. Jak widać, ta trywialna, jak mogłoby się wydawać, teza Buridana ma doniosłe znaczenie w rozwiązaniu antynomii kłamcy, ale ten wątek zostanie omówiony w następnym rozdziale.

Druga klasa tautologii *CCL*, którą tworzą formuły $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) : \alpha_i$, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, informuje o istocie implikacji treściowej. Implikacja ta ustala treść każdego zdania w ten sposób, że najpierw zdanie to rozpoznaje jako koniunkcję pewnej grupy innych zdań i treść tych składowych zdań razem wzięta tworzy treść wyjściowego zdania.

2. Zdanie kłamcy w logice treści

Oczywiste jest to, że na gruncie logiki prawdziwościowej antynomia kłamcy jest nieusuwalna. Mimo podejmowania różnych prób jej uniknięcia[2] nie da się zaprzeczyć, że skoro każde zdanie jest utożsamione z wartością logiczną, to zdanie L = „To zdanie jest fałszywe" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest fałszywe. Tym bardziej interesujące jest to, że dla człowieka niemającego wiedzy na temat antynomii kłamcy zdanie kłamcy nie jest żadną zagadką myślenia, tak jak żadną zagadką nie jest zdanie sprzeczne. Dla każdego jasne jest przecież, że zwykła sprzeczność, jak na przykład „Słońce świeci i nie świeci zarazem", jest jawnym fałszem. Podobne reakcje towarzyszą zetknięciu się ze zdaniem kłamcy „To zdanie jest fałszywe" tych osób, które nie przeszły treningu logiki formalnej. Dość powszechną oceną jest uznanie tego zdania za fałszywe. Potwierdziły to badania neurofizjologiczne przeprowadzone na tych studentach Uniwersytetu SWPS w Warszawie, którzy nie odbyli kursu logiki (Rudnicki, Łukowski 2019). Trudno jest też przyjąć, że taki stan rzeczy jest skutkiem nieumiejętności myślenia, gdyż eksperymentowi zostali poddani ludzie mający za sobą raczej ponadprzeciętny trening myślowy. Co ciekawe, żadnego problemu ze zdaniem kłamcy nie mieli też tak wybitni myśliciele średniowieczni, jak chociażby Jean Buridan (ok. 1295–1363), Thomas Bradwardine (ok. 1300–1349)

[2] Dość liczne są publikacje prezentujące przegląd sposobów uniknięcia antynomii kłamcy, na przykład Łukowski 2006: § 3.2.

czy Albert Saksoński (ok. 1320–1390) (Rahman, Tulenheimo, Genot 2008). Dość powszechne w średniowieczu było bowiem traktowanie zdania kłamcy jako fałszywego z powodu swojej sprzeczności. Kluczem do tego podejścia jest wspomniana wcześniej teza Buridana. Ona jest także podstawą podobnego rozumienia problemu kłamcy przez Arthura Priora (Prior 1961). Logika treści, jaką jest *CCL*, umożliwia prostą prezentację faktu, iż na jej gruncie nie ma antynomii kłamcy, a samo zdanie kłamcy jest sprzeczne, a więc fałszywe, nie będąc prawdziwym.

Ważną zaletą logiki z implikacją treściową jest to, że zdanie kłamcy można zapisać w sposób jak najbardziej zbliżony do jego sensu, aby nie powiedzieć, że wręcz precyzyjnie oddający sens tego zdania:

(1) $L : \neg L$.

Zdanie kłamcy mówi dokładnie to, że jest fałszywe, i ani mniej, ani więcej. Możliwość tego zapisu silnie kontrastuje z tradycyjnym sposobem przedstawiania zdania kłamcy w postaci równoważności $L \leftrightarrow \neg L$. Nietrudno zauważyć, że zapis ten nie oddaje sensu zdania kłamcy, gdyż treścią L nie jest równoważność $L \leftrightarrow \neg L$, lecz właśnie $\neg L$. Zdanie kłamcy nie mówi, że jest równoważne swojej negacji, lecz że jest fałszywe. Poprawność zapisu ma swoje, łatwe do akceptacji konsekwencje. Skoro zgodnie z tezą Buridana każde zdanie mówi to, co mówi, czyli każde zdanie rości do prawdy (należy je traktować tak, jakby było prawdziwe), to

(2) $L : L$.

Na mocy (1) i (2) oraz aksjomatów, by $A_{1:}$, $A_{2:}$, $A_{4:}$, mamy

(3) $L : (L \wedge \neg L)$,

a nawet

(4) $L : ((L) \wedge (\neg L) \wedge (L \wedge \neg L))$.

Skoro między innymi zdanie kłamcy orzeka fałsz $L \wedge \neg L$, samo też musi być fałszywe. Nie ma też możliwości wykazania, że jako fałszywe jest również prawdziwe. Zdanie L nie jest już więc paradoksalne, bo jest fałszywe, nie będąc prawdziwym. Nietrudno dostrzec, że paradoksalność zdania kłamcy w logikach prawdziwościowych wynika z samego zapisu, który tę paradoksalność jawnie implikuje $L \leftrightarrow \neg L$.

Brak antynomialności zdania L pokazuje też analiza semantyczna. Niech $\mathcal{M}_{CCL} = (\mathcal{A}_{CCL}, D)$ będzie takim CCL-modelem, $v \in Hom(\mathcal{L}_{CCL}, \mathcal{A}_{CCL})$ zaś takim homomorfizmem, że $v(L) = a_0 \in A_{CCL}$. Skoro L jest zdaniem kłamcy, więc $L : \neg L$ jest zdaniem prawdziwym, to znaczy:

(5) $a_0 \supset -a_0 \in D$.

Na mocy warunku ósmego CCL-modelu mamy więc, że

(6) $a_0 = -a_0 \cap c$, dla pewnego $c \in A$.

Wystarczy teraz rozstrzygnąć, czy $a_0 \in D$, czy $a_0 \notin D$.

I. Niech $a_0 \in D$. Wtedy także $-a_0 \cap c \in D$. Na mocy warunku piątego $-a_0 \in D$, a zatem wobec warunku czwartego $a_0 \notin D$ – sprzeczność. Oznacza to, że zdanie L nie może być prawdziwe w modelu $\mathcal{M}_{CCL}$ przy wartościowaniu v.

II. Niech $a_0 \notin D$. Na mocy warunku czwartego $-a_0 \in D$, czyli $a_0 = -a_0 \cap c \notin D$, dla pewnego $c \in A$. Zatem $-a_0 \notin D$ lub $c \notin D$. Ponieważ $-a_0 \in D$, więc $c \notin D$. Rozumowanie zakończy się powodzeniem, czyli niesprzecznością, jeśli znajdziemy takie fałszywe zdanie z, że $L : z$. Ale takie zdanie już znaleźliśmy i jest nim $L \wedge \neg L$. Niech więc $c = v(z) = v(L \wedge \neg L)$. Wówczas $c \notin D$ – brak sprzeczności.

Podsumowując, L jest zdaniem fałszywym, chociaż mówi właśnie to, że jest fałszywe, a więc prawdę, bo mówi też coś więcej, że jest sprzeczne.

Można i należy stwierdzić coś więcej, a mianowicie to, że zdanie kłamcy mówi, że jest fałszywe tylko wtedy, gdy je potraktujemy jako prawdziwe. W przeciwnym razie będziemy musieli stwierdzić, że orzeka ono o swojej prawdziwości.

Warte dogłębniejszych badań jest sprawdzenie, czy paradoks kłamcy nie nabrał walorów wielkiego problemu logicznego dopiero wtedy, gdy pojawiło się fregowskie podejście do rozumienia logiki. Przykład zdania kłamcy jest doskonałą ilustracją fundamentalnej różnicy zachodzącej między logiką prawdziwościową, czyli logiką fregowską, a logiką treści, czyli logiką niefregowską.

Naturalnie przykładów wskazujących na fundamentalną, istotową różnicę między tymi dwoma rodzajami logik formalnych jest więcej. Sławne problemy-paradoksy logiki prawdziwościowej na gruncie logiki treści w ogóle się nie pojawiają. Tak jest z paradoksami implikacji materialnej, którymi zajmiemy się w następnym rozdziale.

3. Paradoksy implikacji materialnej w logice treści

Jednym z najbardziej drastycznych paradoksów implikacji materialnej jest to, że tautologią na przykład logiki klasycznej jest formuła $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$. Traktując implikację klasyczną jako wyrażającą wynikanie jednego zdania z drugiego, dochodzimy do absurdalnego, wykraczającego poza wszelkie granice zdrowego rozsądku wniosku, że wśród wybranych dowolnie dwóch zdań p i q przynajmniej jedno wynika z drugiego. Zatem albo zdanie A = „Kraków jest miastem portugalskim" wynika ze zdania B = „Pies jest ssakiem", albo B wynika z A, albo też każde wynika z każdego. Wykluczony jest jeden jedyny i na dodatek prawdziwy przypadek, że żadne nie wynika z żadnego. Oczywiście przypadek, jakim jest para zdań A i B, pokazuje dobitnie to, że logika prawdziwościowa nie nadaje się do wyrażania związków wynikania jednych zdań z innych, a otrzymany paradoks nie jest *de facto* żadnym paradoksem. Skoro bowiem logika prawdziwościowa utożsamia zdania z wartościami logicznymi w ten sposób, że każde zdanie prawdziwe jest utożsamione z jedynką symbolizującą prawdę, każde zdanie fałszywe jest zaś utożsamione z zerem, które symbolizuje fałsz, to tak naprawdę nie mamy wielkiej mnogości zdań języka naturalnego, lecz dwa zaledwie obiekty 1 i 0, na których dokonujemy operacji zgodnych z dobrze znanymi tabelkami wartości logicznych dla spójników prawdziwościowych. Jeśli więc finalnym wynikiem operacji na tych wartościach dla zdania złożonego jest 1, to na zupełnie nieuprawnionej podstawie stwierdzamy prawdziwość tego zdania. Tę nieuprawnioną procedurę przeprowadzamy na zdaniu złożonym („Jeśli Kraków jest miastem portugalskim, to pies jest ssakiem” lub „Jeśli pies jest ssakiem, to Kraków jest miastem portugalskim”), dochodząc do przeczącego oczywistości wniosku, że musi być ono prawdziwe. Tymczasem mamy do czynienia z prostym beztreściowym rachunkiem

$$(0 \to 1) \lor (1 \to 0) = 1 \lor 0 = 1.$$

Nie ma w nim żadnego znaczenia stwierdzenie, że Kraków jest jakimś miastem, a pies ssakiem. Traktowanie logiki prawdziwościowej we właściwy, odpowiadający jej naturze sposób nie doprowadzi nas nigdy do stwierdzenia, że ma ona jakieś paradoksy implikacji materialnej.

Jasne jest, że użycie implikacji treściowej do wyrażenia związku wynikania jednych zdań z innych nie skutkuje takimi absurdami. Tautologią *CCL* nie jest bowiem formuła $(\alpha : \beta) \lor (\beta : \alpha)$, co jest zgodne z naszym treściowym ze swej natury myśleniem. Nie jest przecież prawdą ani zdanie $A : B$, ani $B : A$. Nie może więc być prawdą $(A : B) \lor (B : A)$.

Podobnie jest z inną znaną paradoksalną tautologią klasyczną $\alpha \to (\alpha \lor \beta)$. Jej wybór jako kolejnego przykładu nie jest przypadkowy, gdyż jest ona źródłem innego bardzo znanego i ważnego dla logik deontycznych paradoksu Rossa.

4. Deontyczność w logice treści

Porównanie logiki prawdziwościowej i treściowej na gruncie deontyczności zacznijmy od przypomnienia jednej z najważniejszych reguł dla zdań deontycznych, obowiązującej na przykład w *standardowej logice deontycznej* (*SDL*). Ma ona postać

$$O(\alpha \to \beta) \mid\!- O\alpha \to O\beta.$$

Wśród jej podstawień jest więc następująca reguła *SDL*

$$O(\alpha \to (\alpha \lor \beta)) \mid\!- O\alpha \to O(\alpha \lor \beta).$$

Teraz za α podstawmy zdanie A = „Listonosz doręcza list", a za β zdanie B = „Listonosz pali list". Wynik jest absurdalny i znany pod nazwą paradoksu Rossa. Skoro bowiem każda tautologia klasyczna jest obowiązująca, to w szczególności prawdą jest $O(A \to (A \vee B))$, co na mocy powyższej reguły daje prawdziwość $OA \to O(A \vee B)$. Zatem na mocy *SDL* jeśli listonosz jest zobowiązany do dostarczenia listu, to jest zobowiązany do dostarczenia listu lub spalenia go. Ale listonosz rzeczywiście jest zobowiązany do dostarczenia listu. Zatem ostatecznie listonosz jest zobowiązany do dostarczenia listu lub spalenia go.

Pomysł wykorzystywania logik prawdziwościowych do wyrażania deontyczności faktycznie jest zaskakujący i z pewnością trudny do wytłumaczenia. Prawdziwość zdań poprzedzonych deontycznymi funktorami obowiązku (O), przyzwolenia (P) oraz zakazu (F) zależy wyłącznie od wartości logicznych zdań poprzedzonych tymi funktorami. Innymi słowy, to, co mówi dane zdanie, uznajemy za obowiązujące, dozwolone lub zakazane niezależnie od tej właśnie deontycznie ocenianej treści zdania, lecz wyłącznie na podstawie wartości logicznej zdania. Czy to, że niemieckie obozy zagłady istniały, jest prawdą, wystarczy do stwierdzenia przyzwolenia dla ich istnienia, czy może nawet do stwierdzenia, że powinny istnieć?

Zupełnie inna sytuacja jest wówczas, gdy podstawą rozważań deontycznych jest logika treści. I to z co najmniej dwóch powodów. Po pierwsze, logika deontyczna określona na logice treści nie dziedziczy absurdalnych praw logiki prawdziwościowej. Nietrudno zauważyć, że ponieważ formuła $\alpha : (\alpha \vee \beta)$ nie jest tautologią *CCL*, nie istnieje zagrożenie popadnięciem w sprzeczność z oczywistymi intuicjami. Nikt przecież nie uzna, że zdanie „Listonosz doręcza list" mówi, że „Listonosz doręcza list lub go pali". Po drugie zaś, zarówno relacje między funktorami deontycznymi, jak i prawa czysto deontyczne mają wreszcie charakter treściowy, a nie prawdziwościowy.

Na początek zauważmy, że zwykłe zastąpienie wspomnianej wcześniej reguły $O(\alpha \to \beta) \vdash O\alpha \to O\beta$ przez chociażby

$$O(\alpha : \beta) \vdash O\alpha \to O\beta \quad \text{lub} \quad O(\alpha : \beta) \vdash O\alpha : O\beta$$

nie tylko uwalnia od paradoksu Rossa, ale czyni regułę sensowną. Skoro bowiem treść zdania B jest częścią treści zdania A, czyli $A \equiv_c$ ($B \wedge$ „coś”), gdzie „coś” oznacza zdanie swoją treścią dopełniające treść B do treści A, to faktycznie obowiązywanie A nie tylko implikuje obowiązywanie B, ale nawet o tym mówi. Z tej treściowej perspektywy intuicyjna jest więc zarówno prawdziwość zdania $OA \to OB$, jak i prawdziwość $OA : OB$, o ile prawdą jest że $O(A : B)$. Warto w tym miejscu poczynić prostą dygresję, że zdanie będące jakimkolwiek podstawieniem usuniętego z reguły członu $O(\alpha \to \beta)$ ma wręcz dziwaczne znaczenie: obowiązkowa jest każda implikacja, jeśli tylko jej poprzednik jest fałszywy lub następnik prawdziwy. Czy rzeczywiście ktokolwiek w taki sposób rozumie sens funktora obowiązku?

Implikacja treściowa umożliwia sformułowanie jeszcze innych dość sensownych wersji niefortunnej reguły $O(\alpha \to \beta) \vdash O\alpha \to O\beta$. Rozważmy pewne uproszczenie obu wcześniej zaproponowanych treściowych reguł deontycznych

$$\alpha : \beta \vdash O\alpha \to O\beta \quad \text{oraz} \quad \alpha : \beta \vdash O\alpha : O\beta.$$

Niech zdania A i B będą podstawieniami za odpowiednio α i β. Jeśli prawdą jest zdanie $A : B$, czyli A mówi, że B, to treść zdania B jest częścią w sensie koniunkcji treści zdania A. Oznacza to, że jeśli powinno zajść A, to między innymi powinno zajść B, czyli obowiązek zajścia B jest częścią obowiązku zajścia A. Prawdziwe jest więc zdanie $OA : OB$, to zaś implikuje prawdziwość zdania $OA \to OB$. Żaden z tych wniosków nie wydaje się paradoksalny. Wręcz przeciwnie, oba wydają się silnie intuicyjne. Rzeczywiście więc zarówno $OA : OB$, jak i $OA \to OB$ są treściowymi konsekwencjami założenia, że $A : B$. Można więc uznać, że

$$A : B \vdash OA : OB \vdash OA \to OB.$$

Naturalnie zdanie $OA : OB$ nie jest i nie powinno być wyprowadzalne z $OA \to OB$.

Logika treści stwarza interesujące możliwości w zakresie wzajemnego definiowania funktorów deontycznych. Dla przykładu, można uznać identyczność $PA \equiv_c \neg O\neg A$ lub tylko jedną z implikacji treściowych, albo $PA : \neg O\neg A$, albo $\neg O\neg A : PA$. Powstają więc trzy możliwości:

1. „A jest dozwolone" mówi dokładnie to samo co „Nie jest prawdą, że nakazana jest nieprawda, że A";
2. „A jest dozwolone" mówi więcej niż to, że „Nie jest prawdą, że nakazana jest nieprawda, że A";
3. „Nie jest prawdą, że nakazana jest nieprawda, że A" mówi więcej niż to, że „A jest dozwolone".

Oczywiście $PA \equiv_c \neg O\neg A$, $PA : \neg O\neg A$ oraz $\neg O\neg A : PA$ implikują, odpowiednio, $PA \leftrightarrow \neg O\neg A$, $PA \rightarrow \neg O\neg A$ oraz $\neg O\neg A \rightarrow PA$. Dlatego logiczna inferencja jest możliwa, ale standardowe paradoksy deontyczności są zablokowane.

Również rozpoznanie sensu norm zależy od przyjętych założeń. Dla przykładu, jeśli $OA : PA$, co jest intuicyjnie zrozumiałe, wtedy $OA \equiv_c PA \wedge$ „coś", gdzie „coś" nie powinno dawać trywialnej identyczności[3]. Może więc także $OA : \neg P\neg A$ powinno być założone? Wtedy rozpoznanie sensu OA dawałoby równość $OA \equiv_c PA \wedge \neg P\neg A$. Jeśli takie rozwiązanie wciąż nas nie zadowala, całą procedurę rozszerzania sensu można powtórzyć dla nowego zdania, na przykład $OA : OOA$.

Na koniec deontycznych rozważań zauważmy, że akceptacja reguły

$$\alpha \vdash O\alpha,$$

gdzie α jest tautologią, nie oznacza, że wszystkie normy mają ten sam sens, 1 (jedynkę). Mimo iż wszystkie są równoważne, to i tak mają odmienną treść, nie są więc identyczne. Ani prawo wyłączonego środka nie mówi tego, co zasada niesprzeczności, ani jedno prawo de Morgana nie mówi tego, co drugie. Jest to zgodne z powszechnym odczuciem, że żadne dwie normy nie mają tej samej treści, a implikacja treściowa właśnie umożliwia szczegółowe rozpoznanie sensu każdej z norm. Wydaje się więc, że logika bez niefregowskiego spójnika nie jest przydatna w semantycznej analizie norm.

---

[3] Trywialne są tożsamości $OA \equiv_c PA \wedge PA$ ($\equiv_c PA$) oraz $OA \equiv_c PA \wedge OA$.

5. Definicja prawdy w logice treści

Analizowane wyżej zdanie kłamcy ma w logice prawdziwościowej, czyli fregowskiej, ogromne znaczenie, gdyż jest tym zdaniem, na którym załamuje się definicja prawdy Tarskiego. Liczne próby, w tym także stratyfikacja języka autorstwa samego Alfreda Tarskiego, miały na celu rozwiązanie tej trudności. Tymczasem na gruncie logiki treści, czyli niefregowskiej, zdanie kłamcy nie jest antynomialne. Dzięki temu możliwe jest podjęcie próby zdefiniowania prawdy na wzór Tarskiego. Okazuje się, że zadanie to nie jest zbyt trudne.

Poszerzmy *CCL*-język o stałą logiczną **1** do postaci umożliwiającej definiowanie prawdy. Teraz mamy więc CCL^{1} – język będący algebrą $\mathcal{L}_{CCL}{}^{1} = (For_{CCL}{}^{1}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, :, \mathbf{1})$. *CCL*-modele rozszerzmy do postaci $CCL^{\mathbf{I}}$-modeli $\mathcal{M}_{CCL}{}^{\mathbf{I}} = (\mathcal{A}_{CCL}{}^{\mathbf{I}}, D)$, gdzie $\mathcal{A}_{CCL}{}^{\mathbf{I}} = (A_{CCL}{}^{\mathbf{I}}, -, \cap, \cup, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \supset, \mathbf{I})$ jest algebrą podobną do języka $\mathcal{L}_{CCL}{}^{1}$, natomiast

$$\mathbf{I} = \cap\{a : a \in D\}.$$

Chociaż w CCL^{1}-języku, tak samo jak w *CCL*-języku, nie ma formuł nieskończonych, to **1** może być rozumiane jako koniunkcja wszystkich zdań, które w $\mathcal{M}_{CCL}{}^{\mathbf{I}} = (\mathcal{A}_{CCL}{}^{\mathbf{I}}, D)$ i przy wartościowaniu *v* są uznane za prawdziwe. Naturalnie członami tej niedającej się zapisać w CCL^{1}-języku, choć dającej się zinterpretować semantycznie, „wirtualnej", nieskończonej koniunkcji są między innymi wszystkie prawdy logiczne logiki CCL^{1}. Teraz możliwe jest podanie definicji prawdy.

Definicja zdania prawdziwego:

$$\alpha \leftrightarrow (\mathbf{1} : \alpha)$$

lub przy użyciu predykatu *T*:

$$T\alpha \leftrightarrow (\mathbf{1} : \alpha).$$

Na mocy tej definicji powiemy, że

zdanie *p* jest prawdziwe wtw $\mathbf{1} : p$.

Nietrudno zauważyć, że definicji tej nie sposób zarzucić ani kolistości, ani asemantyczności. W rzeczywistości bowiem zdanie *p* jest prawdziwe, jeśli jest prawdziwe w uznawanym przez nas modelu interpretującym język, a tak naprawdę świat. Definicja ta czyni zadość nie tylko myśleniu codziennemu, ale także jest zgodna z praktyką uprawiania nauki. To, co uznajemy za prawdę, może się zmienić, jeśli tylko zmieni się model postrzegania rzeczywistości. W oczywisty sposób fakt ten jest spełniony przez powyższą definicję. Jednak głębsza analiza własności tej definicji, zwłaszcza wobec czterech zarzutów, jakie definicji Tarskiego postawił Hilary Putnam (1975, 1983, 1985–1986), wymagałaby odrębnej publikacji i dlatego tutaj zostanie pominięta. Warto jednak zauważyć, że obszerna i precyzyjna odpowiedź Jana Woleńskiego (2001) na wspomniane zarzuty Putnama może posłużyć za podstawę pogłębionego komentarza zaproponowanej tu definicji prawdy. Definicję tę można bowiem uznać za nowy zapis znanej i cenionej definicji Tarskiego.

Zakończenie

Z pewnością różnic dzielących logiki fregowskie od niefregowskich jest dużo więcej, niż tu zostało przedstawione. Niektóre nie są jeszcze uświadomione, a wśród tych nieznanych niektóre mogą okazać się wyjątkowo znaczące. Jednak już ta bardzo krótka i raczej wybiórcza niż usystematyzowana analiza pokazuje, że między paradygmatem fregowskim a niefregowskim istnieje różnica niezwykle znacząca. Logiki prawdziwościowe, redukujące sensy zdań do wartości logicznych, czynią z tych logik narzędzia raczej nieprzydatne w modelowaniu ludzkiego myślenia. Jeśli nawet w jakichś przypadkach zachodzi zgodność, to okazuje się ona bardziej niezrozumiała i trudniejsza do wyjaśnienia aniżeli w przypadku dobrze znanych paradoksów implikacji materialnej, które po uwzględnieniu natury logik prawdziwościowych zupełnie przestają być paradoksalne. Jednakże logiki niefregowskie przez zastąpienie rachunku na wartościach logicznych analizą treści zdań znacznie przybliżają się do myślenia i codziennego, i naukowego. Sytuacja wydaje się ściśle analogiczna do tej, jaką mamy w teoriach mnogości: dystrybutywnej i kolektywnej.

Sens zdania w logice prawdziwościowej jest takim ponadczasowym i pozarzeczywistym abstraktem jak zbiór w sensie dystrybutywnym. Sens zdania w logice treści nie jest już natomiast tworem wyabstrahowanym od rzeczywistości, ale tworem realnie istniejącym tu i teraz, mającym swoje części, które także nie są wyabstrahowane od świata. Sens zdania w logice treści jest tak samo ingrediensem sensu innego zdania jak zajmujące czas i przestrzeń zbioru w sensie kolektywnym[4]. Uświadamiając sobie już chociażby te różnice, można dojść do przekonania, że opuszczając świat logik prawdziwościowych na rzecz logik treści, zmieniamy paradygmat myślenia o tym, czym jest logika.

Bibliografia

Austin, J. L. (1962). *How to Do Things with Words*. Oxford: Clarendon Press.

Bloom, S. L., Suszko, R. (1972). Investigations into the Sentential Calculus with Identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *13*(3), 289–308.

Duhem, P. (1906). *La Théorie Phisique. Son Objet, Sa Structure*. Paris: M. Riviére.

Grice, H. P. (1975). Logic and Conversation. W: P. Cole, J. Morgan (Eds.), *Syntax and Semantics*, 3. Academic Press. Przedruk w Grice, H. P. (1989). *Studies in the Way of Words* (s. 22–40). Harvard University Press.

Korta, K., Perry, J. (2008). The Pragmatic Circle. *Synthese*, *165*, 347–357.

Levinson, S. (2000). *Presumptive Meaning. The Theory of Generalized Conversational Implicature*. Cambridge: MIT Press.

[4] U Łukowskiego (2019) pokazane jest podobieństwo, jakie zachodzi między różnicą dzielącą zbiory dystrybutywne od kolektywnych a różnicą dzielącą sensy zdań w logikach prawdziwościowych i w treściowych.

Łukowski, P. (1997). An Approach to the Liar Paradox. W: *New Aspects in Non-Classical Logics and Their Kripke Semantics* (s. 68–80). Kyoto: Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.

Łukowski, P. (2006). *Paradoksy*. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Łukowski, P. (2011). *Paradoxes*. Dordrecht–Heidelberg–London–New York: Springer.

Łukowski, P. (2019). „Distributive" or „Collective" Approach to Sentences. *Logic and Logical Philosophy*, *28*, 331–354.

Prior, A. N. (1961). On a Family of Paradoxes. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *2*(1), 16–32.

Putnam, H. (1975). Do True Assertions Correspond to Reality. W: H., Putnam, *Mind, Language and Reality, Philosophical Papers*, 2 (s. 70–84). Cambridge: Cambridge University Press.

Putnam, H. (1983). On Truth. W: Ch. Parsons, R. Schwartz (Eds.), *How Many Questions? Essays in Honor of Sidney Morgenbesser* (s. 55–56). Indianapolis: Hackett. Przedruk w Putnam, H. (1994). *Words & Life* (s. 316–329). Conant, J. (Ed.). Cambridge: Harvard University Press.

Putnam, H. (1985–1986). On Comparison of Something with Something Else. *New Literary History*, *17*, 61–79. Przedruk w Putnam, H. (1994). *Words & Life* (s. 330–350). Conant, J. (Ed.). Cambridge: Harvard University Press.

Rahman, S., Tulenheimo, T., Genot, E. (Eds.). (2008). *Unity, Truth and the Liar. The Modern Relevance of Medieval Solutions to the Liar Paradox*. New York: Springer.

Ross, A. (1941). Imperatives and Logic. *Theoria*, *7*, 53–71.

Rudnicki, K., Łukowski, P. (2019). Psychophysiological Approach to the Liar Paradox. Jean Buridan's Virtual Entailment Principle Put to the Test. *Synthese*. https://doi.org/10.1007/s11229-019-02107-x

Searle, J. R. (1969). *Speech Acts*. Cambridge: Cambridge University Press.

Searle, J. R., Vanderveken, D. (1985). *Foundations of Illocutionary Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Simons, P. (2020). Stanisław Leśniewski. W: E. N., Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Pobrane z https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/lesniewski/

Suszko, R. (1975). Abolition of the Fregean axiom. *Lecture Notes in Mathematics*, *453*, 169–239.

Woleński, J. (2001). In Defense of the Semantic Definition of Truth. *Synthese*, *126*, 67–90.